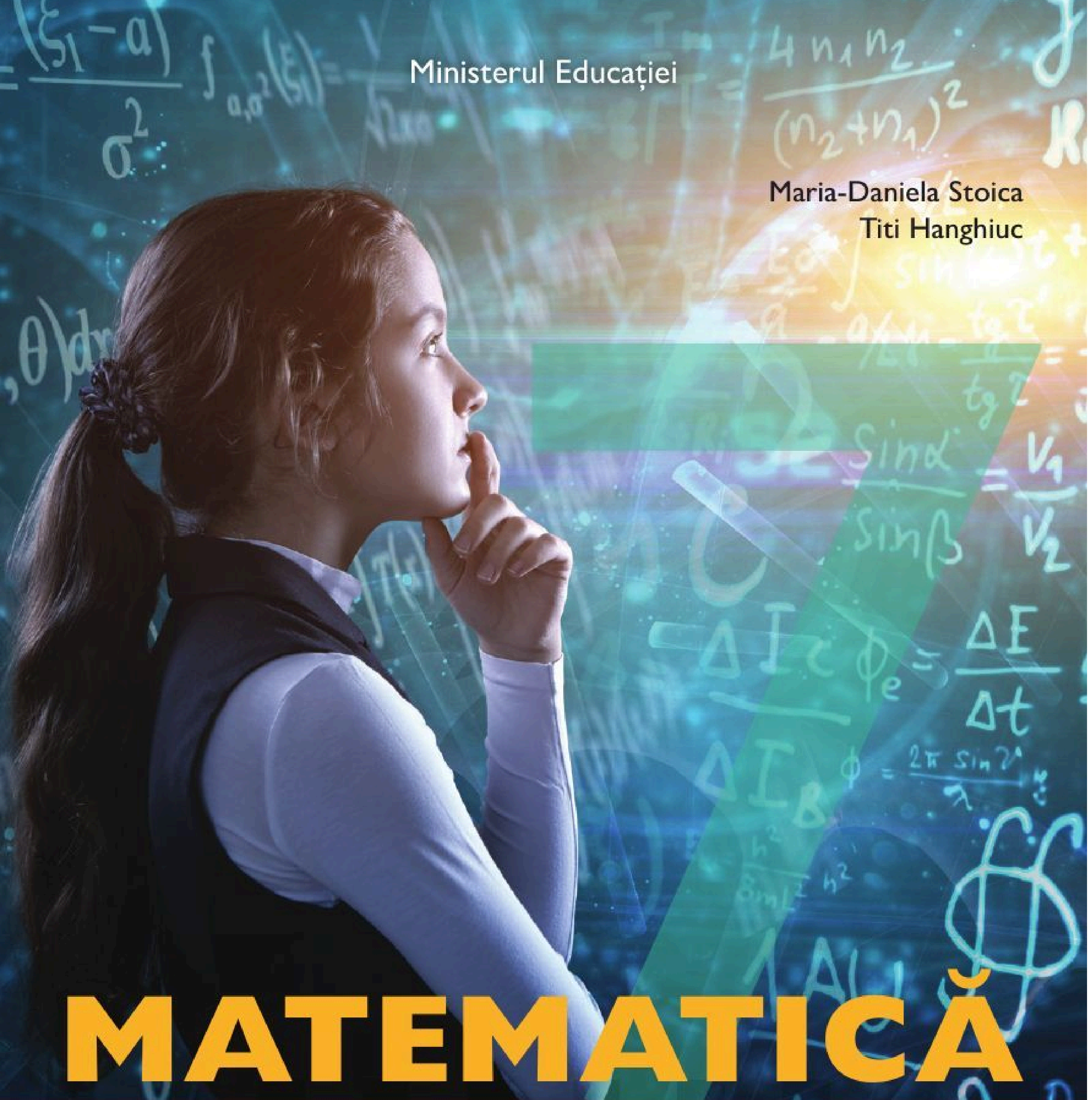
Ministerul Educației

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc



MATEMATICĂ

clasa a VII-a

Booklet

CUPRINS

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$

1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare

1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame

1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date

1.5. Identificarea elementelor cercului și/ sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date

1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date

1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale

2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare

2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora

2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date

2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc

2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri

2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale

3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare

3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora

3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme

3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme

3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii

3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)

4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare

4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor

4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere

4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic

4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea

4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale

5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare

5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor

5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice

5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice

5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare

6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic)

6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri

6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor

6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic

1. Se consideră mulțimile A = {1, 2, 3, 4, 6, 12} și B mulțimea divizorilor naturali ai lui 18. Determină elementele mulțimilor $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

2. Calculează cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor x și y.
   a) $x = 56, y = 60$; b) $x = 81, y = 225$; c) $x = 162, y = 144$.

3. Prin împărțirea numerelor 313, 370 și 398 la numărul natural nenul *n* se obțin resturile 23, 22 și, respectiv, 21. Determină numărul natural *n*.

4. Determină cel mai mic număr natural care, împărțit pe rând la 21, 28 și 35, dă de fiecare dată restul 13 și câturi nenule.

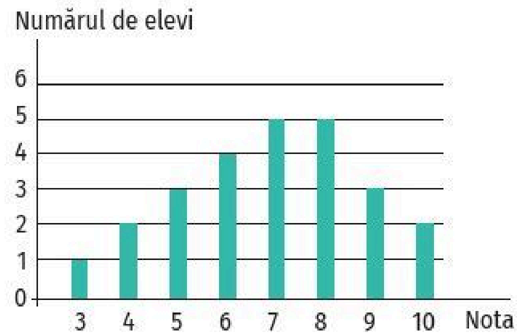
5. Împarte numărul 945 în părți direct proporționale cu numerele 12, 15 și 18.

6. Împarte numărul 325 în părți invers proporționale cu numerele 2, 3 și 4.

7. Dacă 39 de pixuri costă 156 lei, câte pixuri de același fel se pot cumpăra cu 288 lei?

8. 20 de muncitori pot termina o lucrare în 12 zile. În cât timp vor realiza jumătate din lucrare 15 muncitori? (* Se presupune că muncitorii lucrează în același ritm.)

9. În diagrama alăturată sunt prezentate rezultatele obținute la un test de elevii clasei a VII-a A.
   a) Care este probabilitatea ca, alegând la întâmplare un elev din clasa a VII-A, acesta să fi obținut la test cel puțin nota 8?
   b) Cât la sută din numărul de elevi au obținut note de promovare (notă mai mare decât 4)?
   c) Care este media notelor obținute de elevii clasei a VII-a A la test?



10. Aura are 15 ani. Peste doi ani vârsta mamei ei va fi de trei ori mai mare decât vârsta Aurei. Peste câți ani vârsta Aurei va fi de două ori mai mică decât vârsta mamei?

11. Pentru două pixuri și trei stilouri, Dinu a plătit 241,7 lei. Determină prețul unui stilou știind că un pix costă 14,5 lei.

12. Prețul unei rochii este 650 de lei. Determină prețul după o majorare cu 20%.

13. După o reducere cu 20%, prețul unui ceas s-a micșorat cu 105 lei. Cu cât la sută trebuie mărit noul preț pentru a ajunge la prețul inițial? Care a fost prețul inițial al ceasului?

14. Punctele A, B, C și D, în această ordine, aparțin unui cerc cu centrul în punctul O, astfel încât punctele A, O și B sunt coliniare, semidreapta OC este bisectoarea unghiului BOD și $\sphericalangle BOC = 2 \cdot (\sphericalangle AOD) - 10°$.
   a) Determină măsura arcului mic $\overset{\frown}{CD}$.
   b) Demonstrează că $BC \equiv CD$.

15. Fie ABC un triunghi echilateral cu perimetrul egal cu 54 cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC și, respectiv, AC, iar punctul P este simetricul punctului N față de punctul M.
   a) Stabilește natura triunghiului MNC și calculează perimetrul acestuia.
   b) Demonstrează că dreptele CP și CN sunt perpendiculare.
   c) Determină măsura unghiului CPN.

16. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AC în punctul D, iar paralela prin D la dreapta BC intersectează dreapta AB în punctul E.
   a) Demonstrează că triunghiurile BED și AED sunt isoscele.
   b) Demonstrează că semidreapta CE este bisectoarea unghiului ACB.

Evaluare inițială

Timp de lucru: 40 de minute

Subiectul I **40 de puncte**

15 puncte	**1.** *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*
(5 p.)	**A.** Suma numerelor întregi -2 și 10 este: a) -8; b) -12; c) 8; d) 12.
(5 p.)	**B.** Dintre numerele $1,(32)$; $1,323$; $1,3(2)$; $1,32$ mai mare este: a) $1,(32)$; b) $1,323$; c) $1,3(2)$; d) $1,32$.
(5 p.)	**C.** Soluția ecuației $\frac{2}{5}+x=1, x \in \mathbb{Q}$ este: a) $\frac{2}{5}$; b) $-\frac{1}{5}$; c) 4; d) $\frac{3}{5}$.
20 de puncte	**2.** *Scrie pe foaie numai rezultatele.*
(5 p.)	**A.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 12 și 18 este ... .
(5 p.)	**B.** Dintre numerele raționale $a=(-2)^3$ și $b=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{42}{5}$, mai mic este ... .
(5 p.)	**C.** Dacă $\sphericalangle AOB = 58°$, atunci măsura complementului unghiului AOB este egală cu ... .
(5 p.)	**D.** În triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$ și $BC = 20$ cm. Lungimea segmentului AB este egală cu ... cm.
5 puncte	**3.** *Scrie pe foaie litera corespunzătoare răspunsului corect.* Afirmația „Dacă punctul M este mijlocul laturii AB a triunghiului echilateral ABC, atunci măsura unghiului ACM este egală cu 90°." este: a) adevărată; b) falsă.

Subiectul al II-lea **50 de puncte**

Scrie rezolvările complete.

20 de puncte	**1.** Maria are 12 ani, vârsta sa fiind $\frac{3}{10}$ din vârsta mamei sale. Cu câți ani în urmă vârsta Mariei era de cinci ori mai mică decât vârsta mamei sale?
10 puncte	**2.** Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că sunt direct proporționale cu 2, 3 și 4.
20 de puncte	**3.** Pe un cerc cu centrul în punctul O se consideră punctele A, B și C, astfel încât $\sphericalangle AOB = 140°$, $\widehat{BC} = 80°$ și unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Punctul M este simetricul punctului B față de punctul O, iar punctul N este diametral opus punctului C.
(10 p.)	a) Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.
(10 p.)	b) Demonstrează că $CM \equiv BN$.

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua parcursul de învățare din această unitate.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate în clasa a VI-a.					

Unitatea 1

Mulțimea numerelor reale

Luca Paccioli

ȘTIAȚI CĂ...?

- Primul care a utilizat un simbol pentru *radical* a fost matematicianul Luca Paccioli (1445-1517). Acesta a redat în 1487 radicalul prin *R*.
- Apărut în anul 1525, în lucrările lui Christoff Rudolff (1499-1545), simbolul folosit pentru a nota rădăcina pătrată era „√".
- René Descartes (1596-1650) a folosit simbolul utilizat de Christoff Rudolff în anul 1637 adăugând însă linia de deasupra, obținându-se forma actuală „$\sqrt{\ }$".

1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Descopăr

1. Asociază fiecărui număr natural de pe linia 1 pătratul lui de pe linia 2, ca în model.

1) 3 10 9 12 15 20 8 0 1 5

2) 0 400 1 25 100 144 9 81 225 64 30

2. Pentru împachetarea unor cadouri, Ana decupează, dintr-un sul de hârtie, pătrate cu suprafețele de 100 dm² și, respectiv, 64 dm². Care sunt lungimile laturilor pătratelor decupate de Ana?

Învăț

Definiție. **Dacă numărul natural x este pătratul numărului natural y, atunci numărul y se numește rădăcina pătrată a numărului x și se notează $y = \sqrt{x}$.**
(*$\sqrt{x}$ se citește: „radical din x"*)

Așadar, dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $x = y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$.

OBSERVAȚIE.

$\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$

EXEMPLE:

1. $0^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{0} = 0$;

2. $1^2 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1} = 1$;

3. $16 = 4^2 \Leftrightarrow \sqrt{16} = 4$;

4. $25 = 5^2 \Leftrightarrow \sqrt{25} = 5$;

5. $121 = 11^2 \Leftrightarrow \sqrt{121} = 11$;

6. $400 = 20^2 \Leftrightarrow \sqrt{400} = 20$.

OBSERVAȚIE.

Pentru determinarea rădăcinii pătrate a unui număr natural este indicat să descompunem numărul în produs de puteri de numere prime.

EXEMPLE:

1. Pentru a determina rădăcina pătrată a numărului natural 225, îl scriem ca produs de puteri de numere prime: $225 = 3^2 \cdot 5^2$.

$225 = 3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2 = 15^2 \Rightarrow \sqrt{225} = 15$;

2. $1024 = 2^{10} = 2^{5 \cdot 2} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

3. $144 = 2^4 \cdot 3^2 = 2^{2 \cdot 2} \cdot 3^2 = (2^2)^2 \cdot 3^2 = 4^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 3)^2 = 12^2 \Rightarrow \sqrt{144} = 12$.

Exerciții rezolvate

1. Fie $a = 2^{10} - 2^9 - 2^8$. Demonstrează că $\sqrt{a} = 16$.

Rezolvare:

$a = 2^{10} - 2^9 - 2^8 = 2^{8+2} - 2^{8+1} - 2^8 = 2^8 \cdot 2^2 - 2^8 \cdot 2^1 - 2^8 = 2^8 \cdot (2^2 - 2^1 - 1) = 2^8 = (2^4)^2 \Rightarrow$
$\sqrt{a} = 2^4 \Rightarrow \sqrt{a} = 16$.

2. a) Determină cel mai mic număr natural nenul n pentru care $96 \cdot n$ este pătratul unui număr natural.

b) Pentru numărul natural n determinat la punctul a), calculează rădăcina pătrată a numărului $96 \cdot n$.

Rezolvare:

a) $96 = 2^5 \cdot 3 = 2 \cdot 2^4 \cdot 3 = 6 \cdot 2^4 = 6 \cdot (2^2)^2 = 6 \cdot 4^2 \Rightarrow 96 \cdot n = 6 \cdot 4^2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$96 \cdot n = 6 \cdot 4^2 \cdot n$, ($n \in \mathbb{N}^*$) este pătratul unui număr natural nenul dacă $n = 6 \cdot k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Cea mai mică valoare a lui n este 6 (se obține pentru $k = 1$).

b) Dacă $n = 6$, atunci $\sqrt{96 \cdot n} = \sqrt{96 \cdot 6} = \sqrt{6 \cdot 4^2 \cdot 6} = \sqrt{4^2 \cdot 6^2} = \sqrt{24^2} = 24$.

3. i) Fie x și y pătratele a două numere naturale. Demonstrează că $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

ii) Fie x și y pătratele a două numere naturale nenule, $x \vdots y$. Demonstrează că $\sqrt{x : y} = \sqrt{x} : \sqrt{y}$.

iii) Calculează:

a) $\sqrt{25 \cdot 64}$; b) $\sqrt{2^2 \cdot 5^4}$; c) $\sqrt{144 : 9}$; d) $\sqrt{15^4 : 9^2}$.

Rezolvare:

i) Dacă x și y sunt pătratele a două numere naturale, atunci există numerele naturale a și b, astfel încât $x = a^2$ și $y = b^2$. Astfel, $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{y} = b$.

$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{(a \cdot b)^2} = a \cdot b = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$.

ii) Dacă x și y sunt pătratele a două numere naturale nenule, atunci există numerele naturale nenule a și b, astfel încât $x = a^2$ și $y = b^2$.

Astfel, $\sqrt{x} = a$ și $\sqrt{y} = b$.

$\sqrt{x : y} = \sqrt{a^2 : b^2} = \sqrt{(a : b)^2} = a : b = \sqrt{x} : \sqrt{y}$.

iii)

a) $\sqrt{25 \cdot 64} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{8^2} = 5 \cdot 8 = 40$;

b) $\sqrt{2^2 \cdot 5^4} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5^4} = 2 \cdot \sqrt{(5^2)^2} = 2 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$;

c) $\sqrt{144 : 9} = \sqrt{144} : \sqrt{9} = \sqrt{12^2} : \sqrt{3^2} = 12 : 3 = 4$;

d) $\sqrt{15^4 : 9^2} = \sqrt{15^4} : \sqrt{9^2} = \sqrt{(15^2)^2} : 9 = 15^2 : 9 = 225 : 9 = 25$.

4. a) Determină rădăcina pătrată a numărului $a = 12^2 + 5^2$.

b) Calculează $\sqrt{25^2 - 15^2}$.

Rezolvare:

a) $a = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2 \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{13^2} = 13$.

b) $\sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = \sqrt{20^2} = 20$.

ȘTIAȚI CĂ...?

• În limba română, cuvântul *radical* are următoarele sensuri:

radical, -ă, radicali, -e, adj., s. m. **I.** Adj. **1.** De bază, fundamental, esențial. ♦ (Adverbial) Din temelie, cu desăvârșire, complet. ♦ (Despre tratamente, leacuri) Care vindecă în întregime, complet. **2.** Care preconizează reforme adânci, acțiuni hotărâtoare; schimbări fundamentale. **II.** s. m. **1.** (Mat.) Rădăcină. ♦ Simbolul matematic care exprimă o extragere de rădăcină. ◊ (Mat.; în sintagmele) *Axă radicală* = locul geometric al punctelor din plan care au aceeași putere față de două cercuri date, reprezentat printr-o dreaptă perpendiculară pe linia care unește centrele cercurilor. *Plan radical* = locul geometric al punctelor din spațiu având aceeași putere față de două sfere date, reprezentat printr-un plan. **2.** (Chim.) Grupare de atomi care rămâne neschimbată într-o reacție chimică și care se comportă ca un element unic. **3.** (Lingv.) Rădăcină. – Din fr. *radical* (sursa dexonline.ro)

Aplic

1. a) Scrie toate numerele naturale de două cifre care sunt pătratele unor numere naturale.

b) Scrie toate numerele naturale de trei cifre, mai mari decât 500, care sunt pătratele unor numere naturale.

2. Asociază fiecărui număr natural de pe linia 1) pătratul lui de pe linia 2), ca în model.

1) 15 3 21 17 111 31 29

2) 441 289 225 961 841 12321 9 421

3. Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

a) $3^2 \cdot 2^4 = (3 \cdot 2^2)^2$;
b) $4 \cdot 9 \cdot 7^2 = (...)^2$;
c) $5^2 \cdot 27 \cdot 3 = (...)^2$;
d) $3^{101} \cdot 3^{21} : 9^{21} = (...)^2$;
e) $1 + 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = (...)^2$;
f) $\dfrac{3^{10} - 3^8}{3^9 - 3^8} = (...)^2$.

4. Se consideră numerele naturale: 121, 324, 503, 576, 80, 196, 4096, 4007, 9^5, $16^3 \cdot 2$, $4^3 \cdot 3^4$, $10^7 + 2$, $3^8 + 3^9 + 3^{10}$, $5^{2n} \cdot 4^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Care dintre aceste numere sunt pătratele unor numere naturale? Justifică.

b) Calculează rădăcina pătrată a numerelor naturale determinate la punctul a).

5. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția este adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $\sqrt{81} = 9$; $\boxed{A}$
b) $\sqrt{1} = 0$; ☐
c) $\sqrt{0} = 1$; ☐
d) $\sqrt{216} = 16$; ☐
e) $\sqrt{6} = 3$; ☐
f) $\sqrt{2^2} = -2$; ☐
g) $\sqrt{3^2 \cdot 4^2} = 12$; ☐
h) $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4$; ☐
i) $\sqrt{16^2 + 12^2} = 20$; ☐
j) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$; ☐
k) $\sqrt{10^2 - 8^2} = 10 - 8$; ☐
l) $\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$. ☐

6. Completează tabelele de mai jos conform modelului.

a)

x	0	6			22	17
x^2	0	36	441	1024		

b)

x	169			729	16	784
$\sqrt{x}$	13	10	15			

c)

x	9		25			36
x^2	81	16		256		
$\sqrt{x}$	3				7	

d)

x	0		36		121	
$\sqrt{x}$	0	3		5		
y	4	16				
$\sqrt{y}$	2		8			16
$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	0			60		
$\sqrt{x \cdot y}$	0					
$\sqrt{x + y}$	2					20
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	2				11	

7. Determină cifrele a, b și c pentru care $\sqrt{\overline{abc}} = \overline{c9}$.

8. Demonstrează că numărul n este pătratul unui număr natural și calculează $\sqrt{n}$.

a) $n = 301 \cdot 462 - 301 \cdot 161$;
c) $n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 49$;
b) $n = 3^{10} - 2 \cdot 3^9 - 2 \cdot 3^8$;
d) $n = 2^{13} - \sqrt{2^{24}}$.

9. Determină aria unui pătrat al cărui perimetru este 20 cm.

10. Determină perimetrul unui pătrat cu aria egală cu 484 m^2.

11. Un teren în formă de pătrat are aria egală cu 1,44 dam^2. Determină perimetrul terenului.

Indicație: Exprimă aria în m^2.

12. Într-un triunghi dreptunghic, ipotenuza are lungimea egală cu 13 cm, iar una dintre catete are lungimea egală cu 5 cm. Determină suma lungimilor catetelor triunghiului.

13. Un teren în formă de dreptunghi are dimensiunile 15 m și, respectiv, 20 m. Pe diagonala dreptunghiului se construiește o alee. Determinați lungimea aleii.

14. Două loturi de pământ au aceeași arie. Unul dintre loturi are formă de pătrat, iar celălalt are formă de dreptunghi. Determină lungimea laturii pătratului știind că dimensiunile lotului dreptunghiular sunt 27 dam și, respectiv, 12 dam.

15. i) Calculează rădăcinile pătrate ale numerelor 324, 225, 144, 400 și 484.

ii) Calculează:

a) $\sqrt{324} + \sqrt{225} - \sqrt{144}$;
b)* $\sqrt{164 - \sqrt{400}} + \sqrt{\sqrt{225} + 1} - \sqrt{484}$.

INDICAȚIE:

b)* $\sqrt{164 - \sqrt{400}} =$
$= \sqrt{164 - 20} = \sqrt{144} =$
$= \sqrt{12^2} = 12.$

16. Calculează:

a) $2 \cdot \sqrt{25} - \sqrt{100} + \sqrt{121}$;
e) $\sqrt{7 + 3 \cdot \sqrt{36}} - 2 \cdot \sqrt{4 \cdot \sqrt{16}}$;
b) $\sqrt{196} - 3 \cdot \sqrt{36} + \sqrt{225}$;
f) $\sqrt{16 \cdot \sqrt{81}} - 2 \cdot \sqrt{\sqrt{9} \cdot \sqrt{144}}$;
c) $10 \cdot \sqrt{900} - 12 \cdot \sqrt{400} + 15 \cdot \sqrt{64}$;
g) $\sqrt{25^2 - 15^2} + \sqrt{6^2 + 8^2}$;
d) $10 \cdot \sqrt{36} - \sqrt{3600} + \sqrt{1}$;
h) $\sqrt{24^2 - 240 + 5^2} - \sqrt{18^2 + 2 \cdot 18 \cdot 12 + 12^2}$.

17. Calculează rădăcina pătrată a numărului natural N.

a) $N = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 49$;

b) $N = 4 + 8 + 12 + \ldots + 196$;

c) $N = (5 + 10 + 15 + \ldots + 200) \cdot 41$;

d) $N = 1 + 3 + 5 + \ldots + 51$;

e) $N = 1 + 3 + 5 + \ldots + 101$;

f)* $N = 10 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{9 \cdot 10}\right)$;

g) $N = 65 \cdot \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{61 \cdot 65}\right)$.

INDICAȚIE:

f)* $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{2-1}{1 \cdot 2} =$
$= \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$;
$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{3-2}{2 \cdot 3} =$
$= \frac{3}{2 \cdot 3} - \frac{2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$.

18. Demonstrează că există 101 numere naturale consecutive printre care nu se găsesc pătratele unor numere naturale.

2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Descopăr

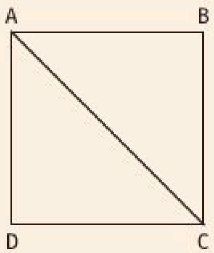


Figura 1

Terenul pe care este amenajat un loc de joacă are forma unui pătrat ABCD a cărui arie este egală cu 0,01 km^2 (figura 1).

a) Determină lungimea laturii pătratului ABCD în hm și în km.

b) Câți metri de gard sunt necesari pentru împrejmuirea locului de joacă?

c) Din punctul A până în punctul C se montează o bandă colorată, reprezentată în figură prin segmentul AC. Estimează lungimea benzii în hm.

Indicație: Exprimă aria pătratului ABCD în hm^2.

Învăț

Estimarea este o evaluare a unei cantități pe baza unor date incomplete sau insuficiente.

Numărul ce reprezintă lungimea diagonalei pătratului din figura 1, exprimată în hm, nu poate fi calculat cu exactitate, dar poate fi încadrat între două numere naturale consecutive.

Pentru orice număr rațional x, $x \geq 0$, există un număr y cu proprietatea $x^2 = y$.

Notăm $y = \sqrt{x}$ (y reprezintă rădăcina pătrată a numărului x).

Dacă x este un număr rațional ($x \geq 0$), atunci rădăcina pătrată a numărului x se poate încadra între două numere naturale consecutive.

Exerciții rezolvate

1. Încadrează rădăcina pătrată a numărului rațional x între două numere naturale consecutive.

a) $x = 15$; b) $x = 43{,}5$; c) $x = \frac{27}{5}$.

Rezolvare:

a) Încadrăm numărul 15 între pătratele a două numere naturale consecutive:

$9 < 15 < 16 \Leftrightarrow 3^2 < 15 < 4^2 \Leftrightarrow 3 < \sqrt{15} < 4$.

În acest caz am estimat că rădăcina pătrată a numărului rațional 15 se află între numerele naturale 3 și 4.

b) $36 < 43{,}5 < 49 \Leftrightarrow 6^2 < 43{,}5 < 7^2 \Leftrightarrow 6 < \sqrt{43{,}5} < 7$.

c) $\frac{27}{5} = 5{,}4$;

$4 < 5{,}4 < 9 \Leftrightarrow 2^2 < 5{,}4 < 3^2 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{5{,}4} < 3 \Leftrightarrow 2 < \sqrt{\frac{27}{5}} < 3$.

2. Determină cardinalul mulțimii A.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 < \sqrt{x} < 7\}$; b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -7 \leq \sqrt{x} \leq -3\}$; c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x^2 \leq 50\}$.

Rezolvare:

a) $5 < \sqrt{x} < 7 \Leftrightarrow 5^2 < x < 7^2 \Leftrightarrow 25 < x < 49 \Rightarrow A = \{26, 27, 28, ..., 48\} \Rightarrow \text{card } A = 23$.

b) $\sqrt{x} \geq 0$ pentru oricare număr natural $x \Rightarrow$ nu există $x \in \mathbb{N}$ pentru care $-7 \leq \sqrt{x} \leq -3 \Rightarrow A = \emptyset \Rightarrow \text{card}\,A = 0$.

c) $x \in \mathbb{N}, 5 \leq x^2 \leq 50 \Rightarrow x^2 \in \{9, 16, 25, 36, 49\} \Rightarrow x \in \{3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \{3, 4, 5, 6, 7\} \Rightarrow \text{card}\,A = 5$.

3. Un stâlp este ancorat cu un cablu metalic ca în figura 2. Sunt suficienți 7 m de cablu metalic pentru a putea ancora stâlpul? Justifică.

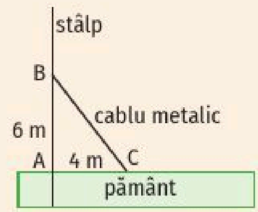


Figura 2

Rezolvare:

Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul ABC ($\sphericalangle A = 90°$) și obținem:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow BC^2 = 52$

$7^2 = 49 < 52 \Rightarrow 7\text{ m} < BC \Rightarrow$ Nu sunt suficienți 7 m de cablu.

Aplic

1. Încadrează rădăcina pătrată a numărului rațional x între două numere naturale consecutive.

a) $x = 7$; e) $x = 70{,}5$; i) $x = 2\frac{4}{5}$;

b) $x = 23$; f) $x = 21{,}23$; j) $x = \frac{45}{4}$;

c) $x = 101$; g) $x = 135{,}2$; k) $x = \frac{446}{5}$;

d) $x = 705$; h) $x = 401{,}45$; l) $x = \frac{999}{4}$.

2. Completează casetele cu numere întregi consecutive pentru a obține propoziții adevărate.

a) $\square < \sqrt{80} < \square$; e) $\square < -\sqrt{12} < \square$; i) $\square < 2 - \sqrt{89} < \square$;

b) $\square < 1 + \sqrt{34} < \square$; f) $\square < -\sqrt{50} < \square$; j) $\square < 3 - \sqrt{48} < \square$;

c) $\square < 2 + \sqrt{110} < \square$; g) $\square < -\sqrt{83} < \square$; k) $\square < 32 - \sqrt{1023} < \square$;

d) $\square < -5 + \sqrt{78} < \square$; h) $\square < -\sqrt{200} < \square$; l) $\square < -6 + \sqrt{215} < \square$.

3. Determină cardinalul mulțimii A.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 < \sqrt{x} < 7\}$; d) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x^2 < 64\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{x} \leq 4\}$; e) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -5 \leq x^2 < -2\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{x} < 5\}$; f) $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{x} < 6\right\}$.

4. În figura 3 este reprezentată schematic o clădire. Pentru a urca pe terasa acestei clădiri, o persoană folosește o scară cu lungimea de 11 m (BC = 11 m). Estimează distanța dintre piciorul scării și zid (lungimea segmentului AC), știind că înălțimea clădirii, fără acoperiș, este 9,9 m (AB = 9,9 m).

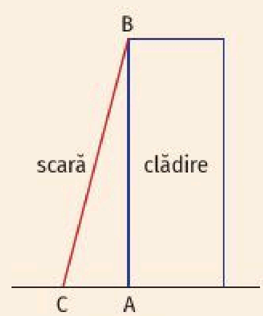


Figura 3

5. Terenul de sport al unei școli are formă de dreptunghi cu dimensiunile 32 m și, respectiv, 50 m. Marius traversează terenul de sport mergând pe o diagonală a acestuia. Estimează distanța parcursă de Marius (exprimată în m).

3. Scoaterea factorilor de sub radical. Introducerea factorilor sub radical

Îmi amintesc

Scrie ca produs de puteri de numere prime următoarele numere naturale: 12, 44, 75, 135 și 147.

Învăț

- $\sqrt{a^2 \cdot b} = a\sqrt{b}$, pentru orice numere naturale nenule a și b

Procedeul prin care un factor este scos de sub radical se numește **scoaterea factorilor de sub radical**.

Pentru a scoate factorii de sub radical putem folosi următorul algoritm:

- se descompune numărul în produs de puteri de numere prime;
- se formează perechi de câte doi factori egali;
- pentru fiecare pereche de factori egali, iese de sub radical un factor. Factorii care nu au pereche rămân sub radical.

EXEMPLU:

Se descompune numărul în produs de puteri de numere prime.

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Se formează perechi de câte doi factori egali.

288	2	2
144	2	
72	2	2
36	2	
18	2	
9	3	3
3	3	
1		

Pentru fiecare pereche de factori egali, iese de sub radical un factor. Factorii care nu au pereche rămân sub radical.

$\sqrt{288} = (2 \cdot 2 \cdot 3)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

OBSERVAȚIE.

Dacă n e un număr natural nenul, atunci $\sqrt{a^{2n} \cdot b} = a^n\sqrt{b}$, pentru orice numere naturale nenule a și b.

- $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, pentru orice numere naturale nenule a și b

Procedeul prin care un factor este introdus sub radical se numește **introducerea factorilor sub radical**.

EXEMPLE:

1. $6\sqrt{5} = \sqrt{6^2 \cdot 5} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{180}$;
2. $4\sqrt{2} = \sqrt{4^2 \cdot 2} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$.

Exerciții rezolvate

Scoate factorii de sub radical:

a) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5}$; b) $\sqrt{2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12} \cdot 7^3}$; c) $\sqrt{3^{2m+1} \cdot 5^{2n+1} \cdot 7^{2p}}$, $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare:

a) $\sqrt{2^4 \cdot 3^6 \cdot 5} = \sqrt{2^{2 \cdot 2} \cdot 3^{2 \cdot 3} \cdot 5} = (2^2 \cdot 3^3)\sqrt{5} = (4 \cdot 27)\sqrt{5} = 108\sqrt{5}$;

b) $\sqrt{2^7 \cdot 3^{10} \cdot 5^{12} \cdot 7^3} = \sqrt{2^{2 \cdot 3+1} \cdot 3^{2 \cdot 5} \cdot 5^{2 \cdot 6} \cdot 7^{2 \cdot 1+1}} = \sqrt{2^{2 \cdot 3} \cdot 2^1 \cdot 3^{2 \cdot 5} \cdot 5^{2 \cdot 6} \cdot 7^{2 \cdot 1} \cdot 7^1} =$
$= (2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 7)\sqrt{2 \cdot 7} = (2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^6 \cdot 7)\sqrt{14}$;

c) $\sqrt{3^{2m+1} \cdot 5^{2n+1} \cdot 7^{2p}} = \sqrt{3^{2m} \cdot 3^1 \cdot 5^{2n} \cdot 5^1 \cdot 7^{2p}} = (3^m \cdot 5^n \cdot 7^p)\sqrt{3 \cdot 5} = 3^m \cdot 5^n \cdot 7^p\sqrt{15}$,
$m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

Aplic

1. Completează spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

a) $6\sqrt{2} = \sqrt{\ldots}$;	e) $7\sqrt{3} = \sqrt{\ldots}$;	i) $2\sqrt{\ldots} = \sqrt{56}$;
b) $\sqrt{108} = 6\sqrt{\ldots}$;	f) $\sqrt{200} = \ldots\sqrt{\ldots}$;	j) $\ldots\sqrt{2} = \sqrt{\ldots}$;
c) $5\sqrt{5} = \sqrt{\ldots}$;	g) $3\sqrt{6} = \sqrt{\ldots}$;	k) $3\sqrt{\ldots} = \sqrt{\ldots}$;
d) $\sqrt{150} = \ldots\sqrt{6}$;	h) $15\sqrt{3} = \sqrt{\ldots}$;	l) $\sqrt{\ldots} = \ldots\sqrt{\ldots}$.

2. Asociază fiecărui radical din prima linie termenul echivalent de pe a doua linie, ca în model.

1) $\sqrt{338}$ $\sqrt{192}$ $\sqrt{450}$ $\sqrt{135}$ $\sqrt{315}$ $\sqrt{243}$ $\sqrt{486}$

2) $9\sqrt{6}$ $9\sqrt{3}$ $8\sqrt{3}$ $13\sqrt{2}$ $15\sqrt{2}$ $3\sqrt{15}$ $15\sqrt{3}$ $3\sqrt{35}$

3. Scrie în casetă **A**, dacă propoziția e adevărată și **F**, dacă propoziția este falsă.

a) $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$; ☐	c) $5^2\sqrt{2} = \sqrt{1250}$; ☐	e) $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5} = -3\sqrt{5}$; ☐
b) $\sqrt{288} = 17$; ☐	d) $2\sqrt{15} = \sqrt{60}$; ☐	f) $\sqrt{(-2)^2 \cdot 5^2 \cdot 27} = 30\sqrt{3}$. ☐

4. Determină numărul natural a.

a) $\sqrt{325} = 5\sqrt{a}$; b) $a^2\sqrt{3} = \sqrt{243}$; c) $\sqrt{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = a\sqrt{6}$.

5. Scoate factorii de sub radical: $\sqrt{75}$, $\sqrt{96}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{125}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{128}$, $\sqrt{512}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{63}$, $\sqrt{300}$, $\sqrt{80}$, $\sqrt{270}$.

6. Scoate factorii de sub radical:

a) $\sqrt{5^2 \cdot 7}$;	d) $\sqrt{(-5)^2 \cdot 11}$;	g) $\sqrt{64 \cdot 27}$;
b) $\sqrt{3^2 \cdot 5}$;	e) $\sqrt{3^6 \cdot 2}$;	h) $\sqrt{16 \cdot 125}$;
c) $\sqrt{7^2 \cdot 7}$;	f) $\sqrt{5^3 \cdot 3}$;	i)) $\sqrt{2^{12} \cdot 3}$.

7. Introdu factorii sub radical:

a) $3\sqrt{7}$;	c) $6\sqrt{6}$;	e) $12\sqrt{3}$;	g) $15\sqrt{52}$;
b) $10\sqrt{3}$;	d) $11\sqrt{2}$;	f) $31\sqrt{2}$;	h) $25\sqrt{10}$.

8. Demonstrează că:

a) $\sqrt{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 - 4} = 3\sqrt{3}$; c) $\sqrt{2^5 \cdot 3^4 + 2^4 \cdot 3^5 + 2^4 \cdot 3^4} = 36\sqrt{6}$;

b) $\sqrt{12^3 - 3 \cdot 12^2 - 12^2} = 24\sqrt{2}$; d) $\sqrt{1 + 2 + 3 + \ldots + 99} = 15\sqrt{22}$.

ȘTIAȚI CĂ...?

- În limba română, cuvântul *algoritm* are următoarele sensuri:

algoritm, s. m. – Ansamblu de simboluri folosite în matematică și în logică, permițând găsirea în mod mecanic (prin calcul) a unor rezultate. **1.** P. gener. Succesiune de operații necesare în rezolvarea unei probleme oarecare. [Pl. *algoritme*] – Din fr. *algorithme*. (sursa dexonline.ro)

4. Numere iraționale. Mulțimea numerelor reale, incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Modulul unui număr real. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări

Descopăr

Fie ABCD un pătrat cu lungimea laturii egală cu 1 m.

i) Determină lungimea diagonalei pătratului ABCD (segmentul AC).

ii) Dacă lungimea diagonalei AC este x metri, atunci afirmația „$x \in \mathbb{Q}$" este:

a) adevărată; b) falsă.

Învăț

Aplicând teorema lui Pitagora pentru rezolvarea problemei propuse la secțiunea „Descopăr", obținem $AC^2 = 2$ m² (în triunghiul ABC, $AC^2 = AB^2 + BC^2$). Deci, lungimea diagonalei AC, exprimată în metri, reprezintă rădăcina pătrată a numărului natural 2.

Vom demonstra în continuare că numărul natural 2 nu este pătratul unui număr rațional. (Raționamentul folosit îi este atribuit lui Pitagora.)

Presupunem că numărul natural 2 este pătratul numărului rațional pozitiv a (altfel spus, $a^2 = 2$). Putem scrie $a = \frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}^*$ și $(m, n) = 1$ (m și n sunt prime între ele).

Avem $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, de unde rezultă $\frac{m^2}{n^2} = 2$, deci $m^2 = 2 \cdot n^2$. Cum $(2 \cdot n^2) \vdots 2$, obținem $m^2 \vdots 2$, ceea ce implică $m = 2k$, $k \in \mathbf{N}$ (m este număr par).

Înlocuind m cu $2k$ în relația $m^2 = 2 \cdot n^2$, obținem $4 \cdot k^2 = 2 \cdot n^2$, ceea ce implică $n^2 = 2 \cdot k^2$. De aici rezultă că n este un număr par.

Am obținut că m și n sunt numere naturale pare, deci 2 este un divizor comun al lor, ceea ce contrazice $(m, n) = 1$. Această contradicție arată că presupunerea făcută (a număr rațional, $a^2 = 2$) este falsă. Deci a nu este număr rațional.

Am demonstrat că $\sqrt{2}$ nu este număr rațional, de unde deducem că există și alte numere în afara celor raționale. Aceste numere se numesc **numere iraționale**.

OBSERVAȚIE.

Dacă numărul natural x nu este pătratul altui număr natural, atunci $\sqrt{x}$ este număr irațional.

De exemplu, numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ sunt numere iraționale.

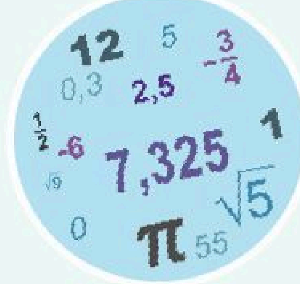
Pornind de la aceste exemple de numere iraționale, deducem că **mulțimea numerelor iraționale nu este finită**.

Reunind mulțimea numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale, se obține o mulțime care se numește **mulțimea numerelor reale** și **se notează $\mathbb{R}$**. Elementele acestei mulțimi se numesc **numere reale**.

Mulțimea numerelor iraționale se notează $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

OBSERVAȚIE.

Orice număr rațional este număr real.



Exemple de numere reale: $\underbrace{2; 1{,}3; -\frac{5}{6}; -1{,}3(5)}_{\in \mathbb{Q}}; \underbrace{\sqrt{2}; \sqrt{\frac{1}{3}}; \sqrt{13}; \sqrt{23}; 2\sqrt{3}}_{\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Mulțimea numerelor reale nenule se notează

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$).

Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări

Știm, din clasa a VI-a, că **axa numerelor este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O, numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură**. Oricărui număr real x îi putem asocia pe axa numerelor un punct. Vom spune că punctul respectiv are coordonata x. De exemplu, în figura 1, punctul A are coordonata 1 (scriem A(1) și citim „punctul A de coordonată 1"), iar punctul P are coordonata x (scriem P(x) și citim „punctul P de coordonată x").

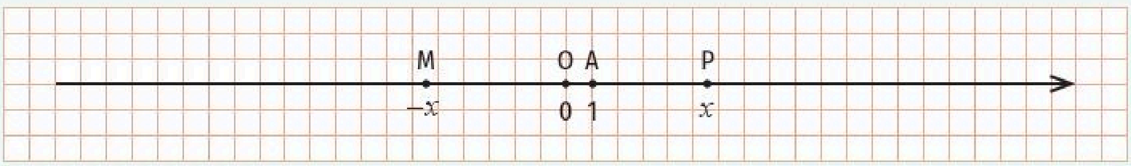


Figura 1

Pentru orice număr real pozitiv x, există un număr real negativ notat $-x$, astfel încât distanța de la originea axei numerelor la punctele P(x) și M($-x$) este aceeași. Numărul real $-x$ este **opusul** numărului x și numărul real x este opusul numărului $-x$ (figura 1).

EXEMPLE:

1. Opusul numărului real $\sqrt{5}$ este numărul real $-\sqrt{5}$ (figura 2).

2. Opusul numărului real $-\sqrt{2}$ este numărul real $\sqrt{2}$.

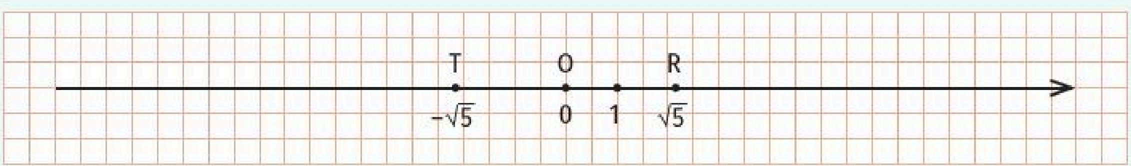


Figura 2

OBSERVAȚII.

1. Numerele reale opuse se reprezintă pe axa numerelor prin puncte simetrice față de originea acesteia (figura 2).

2. Mulțimea numerelor reale negative se notează $\mathbb{R}_-$.

3. Mulțimea numerelor reale pozitive se notează $\mathbb{R}_+$.

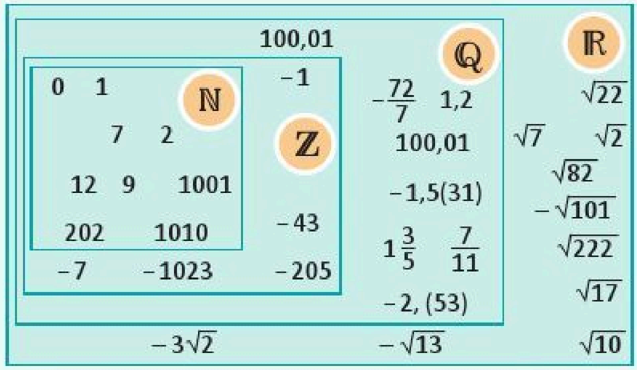
$\mathbb{R}_- = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$

$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

Ținând cont de modul cum a fost definită mulțimea numerelor reale și de relațiile de incluziune cunoscute avem: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Pentru a reprezenta pe axa numerelor un număr irațional trebuie să îl încadrăm, adesea, între două numere întregi consecutive.

EXEMPLU:

Ne propunem să reprezentăm pe axa numerelor numărul irațional $\sqrt{2}$. Pentru aceasta, îl încadrăm între două numere raționale astfel:

- $1 < 2 < 4 \Rightarrow 1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$ (figura 3);
- $\frac{196}{100} < \frac{200}{100} < \frac{225}{100} \Rightarrow \left(\frac{14}{10}\right)^2 < (\sqrt{2})^2 < \left(\frac{15}{10}\right)^2 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ (figura 4).

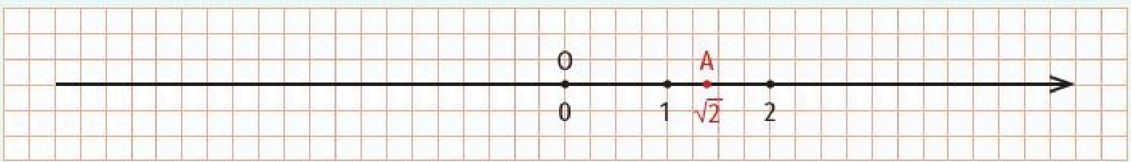


Figura 3

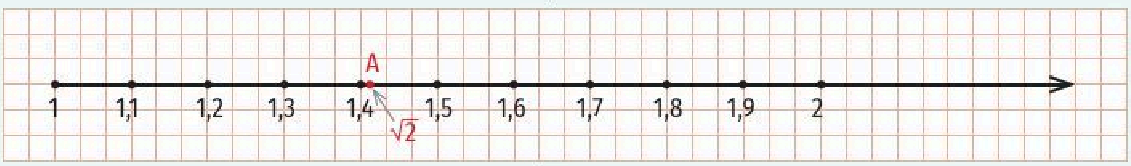


Figura 4

Aflarea cu exactitate a cât mai multor zecimale ale numărului irațional $\sqrt{2}$ i-a preocupat pe matematicieni încă din Antichitate. Folosind aplicația „Calculator științific" din telefon sau de pe computer, obținem $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097$. În această scriere, primele 30 de zecimale ale numărului $\sqrt{2}$ sunt exacte, iar a 31-a zecimală (ultima zecimală) reprezintă o aproximare în funcție de valoarea următoarei zecimale. Așadar, folosind aceste aplicații obținem valori aproximative ale numerelor iraționale.

Numărul $\sqrt{2}$ se scrie ca o fracție zecimală care are o infinitate de cifre nenule în partea dreaptă a virgulei, cifre care nu se repetă în mod periodic.

Numerele iraționale sunt fracții zecimale infinite care nu sunt periodice.

Numerele $a = 0{,}122333444455555666666...$ (după virgulă apare fiecare număr natural de atâtea ori cât este valoarea lui) și $b = 2{,}1248163264128256512...$ (după virgulă se află, în ordine, puterile cu exponent natural ale lui 2) sunt de asemenea numere iraționale.

Pentru a determina aproximările prin lipsă sau prin adaos și rotunjirile numărului irațional $\sqrt{2}$, folosim:

- $1 < \sqrt{2} < 2$;
- $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;
- $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$;
- $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.

Numărul	Aproximare prin lipsă			Aproximare prin adaos			Rotunjire		
	la unități	la zecimi	la sutimi	la unități	la zecimi	la sutimi	la unități	la zecimi	la sutimi
$\sqrt{2}$	1	1,4	1,41	2	1,5	1,42	1	1,4	1,41

Modulul (valoarea absolută) unui număr real

Distanța de la originea axei numerelor la punctul prin care este reprezentat un număr real x pe axa numerelor se numește modulul numărului real x. Se notează $|x|$.

Modulul unui număr real se mai numește și valoare absolută.

EXEMPLE:

1. Modulul numărului real $-\sqrt{7}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul $M(-\sqrt{7})$, deci $|-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$ (figura 5).
2. Modulul numărului real $\sqrt{10}$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul $N(\sqrt{10})$, deci $|\sqrt{10}| = \sqrt{10}$ (figura 5).
3. Modulul numărului real $-4{,}5$ este egal cu distanța de la punctul O la punctul $P(-4{,}5)$, deci $|-4{,}5| = 4{,}5$ (figura 5).

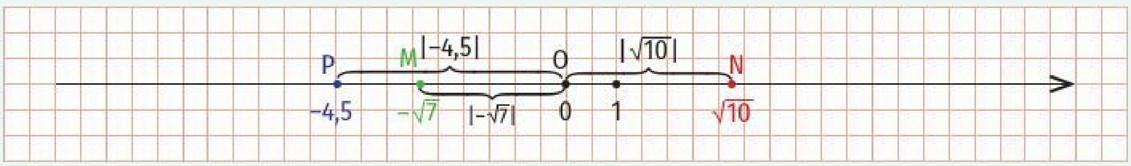


Figura 5

Proprietățile modulului unui număr real

1. $|x| = \begin{cases} -x, \text{ dacă } x < 0 \\ 0, \text{ dacă } x = 0 \\ x, \text{ dacă } x > 0 \end{cases}$;
2. $|x| \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
4. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$;
5. $|x + y| \leq |x| + |y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ (inegalitatea triunghiului).

Compararea și ordonarea numerelor reale

Pe axa numerelor, dintre două numere reale diferite cel mai mare este reprezentat în dreapta celui mai mic.

EXEMPLU:

Fie numerele reale $-\sqrt{3}$ și $-\sqrt{10}$. Acestea se reprezintă pe axa numerelor prin punctele $M(-\sqrt{10})$ și $N(-\sqrt{3})$ (figura 6). În acest caz, $ON = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$ și $OM = |-\sqrt{10}| = \sqrt{10}$. Deoarece $ON < OM$, iar punctele M și N sunt situate în stânga punctului O, rezultă că punctul N este situat în dreapta punctului M. Așadar, $-\sqrt{10} < -\sqrt{3}$.

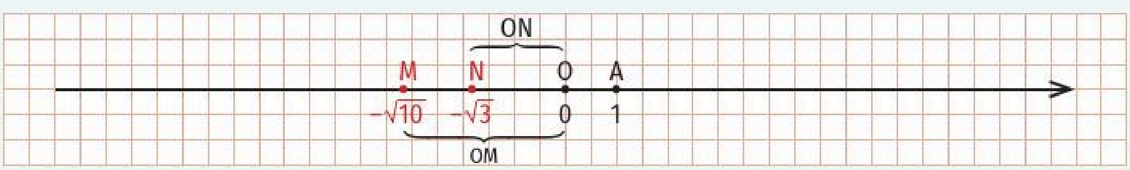


Figura 6

OBSERVAȚII.

1. **Orice număr real negativ este mai mic decât orice număr real pozitiv.**
2. **Dacă x și y sunt două numere reale pozitive și $x < y$, atunci $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.**
3. **Dacă x și y sunt două numere reale negative și $|x| < |y|$, atunci $x > y$.**
4. **Dacă x și y sunt două numere reale pozitive și $|x| < |y|$, atunci $x < y$.**